On calcule $\vec{F} = (qBv_y, -qBv_x, 0)$. Comme $m\vec{a} = (\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt})$, on obtient le système :

Champ magnétique

$$\begin{cases} m\frac{dv_x}{dt} &= qBv_y \\ m\frac{dv_y}{dt} &= -qBv_x \\ m\frac{dv_z}{dt} &= 0 \end{cases}$$

v_z est donc constante, et de plus en dérivant deux fois v_x on a : $\frac{d^2v_x}{dt^2} = qB\frac{dv_y}{dt} = -(qB/m)^2 v_x$.
Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants. Elle admet donc comme solution $v_x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, où $\omega = qB/m$ et A, φ sont des paramètres réels.
On obtient en dérivant $mv_y = -\frac{1}{qB}A\omega\sin(\omega t + \varphi)$, soit $v_y = -A\sin(\omega t + \varphi)$.
Les primitives de v_x, v_y, v_z donnent les coordonnées du vecteur position. Et ce qui précède montre que, selon x et y la particule décrit un cercle (x et y sont respectivement un cosinus et un sinus de même amplitude, même pulsation, même phase), alors que selon z elle a un mouvement rectiligne uniforme : finalement, la particule dans ce champ magnétique décrit une hélice.

Différentielle

corrigé succinct : ces calculs se ramènent à des calculs de dérivées :

(a) si $y = x^2$, $\frac{dy}{dx} = y'(x) = 2x$, donc $\boxed{dy = 2xdx.}$ Mais comme $x > 0$, $x = \sqrt{y}$ et donc $dx = dy/2x$, donc $\boxed{dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}.}$

(b) De même $\boxed{dy = (1 + \tan^2 x)dx = \frac{dx}{\cos^2 x},}$ et par conséquent $\boxed{dx = \frac{dy}{1+y^2}.}$

Loi normale

(a) Dans l'expression de $E(X)$, on effectue le changement de variable $\tau = t - \mu$, alors $E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\tau + \mu)e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}d\tau$.

L'intégrale $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}d\tau$ vaut $\frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}d\tau$. Si on effectue un nouveau changement de variable $\tau = \sqrt{2}\sigma\, r$ l'expression vaut alors

$$\frac{\sqrt{2}\sigma\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-r^2}dr$$

soit μ.

D'autre part, l'intégrale $\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}d\tau$ vaut (par utilisation de primitive) $[\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \times -\sigma^2 \times e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}}]_{-\infty}^{+\infty}$ autrement dit 0 !

Finalement on trouve $E(X) = \mu + 0 = \mu$.
De la même manière on montre que $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

(b) On cherche la loi de $Y = X/k$.

Alors $p(Y < x) = p(X \leq kx) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{t=-\infty}^{kx} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$ (on applique juste la relation précédente en remplaçant x par kx).
On pose $t = ku$ ou $u = k/t$ dans l'intégrale (et donc $dt = kdu$, $du = kdt$) :

Ainsi après changement de variable $p(Y < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{u=-\infty}^{x} e^{-\frac{(ku-\mu)^2}{2\sigma^2}}kdu = \frac{k}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{u=-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-\mu/k)^2}{2\sigma^2/k^2}}du$ (dans l'exponentielle on divise numérateur et dénominateur par k^2, et par ailleurs on fait sortir le k apparu au côté de du de l'intégrale),

donc finalement $p(Y < x) = \frac{1}{\sigma/k\sqrt{2\pi}}\int_{u=-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-\mu/k)^2}{2(\sigma/k)^2}}du$.
On est revenu à la définition ci-dessus de la loi normale : cela signifie exactement que Y suit une loi normale de paramètres d'espérance μ/k et d'écart-type σ/k.